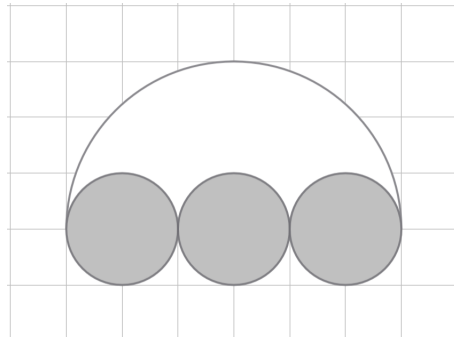


Zadania

Zadanie 1. Oblicz i wynik podaj w cyfrach arabskich: $\text{MMMCDLIX} - \text{CMXC} + \text{XL} = ?$.

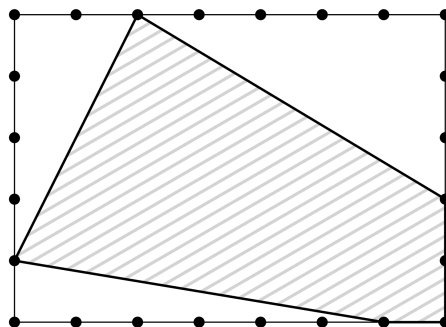
Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Oblicz w stopniach wartość wyrażenia $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP$.

Zadanie 3. W układzie współrzędnych dane są trzy okręgi i jeden półokrąg, jak na rysunku. Wyznacz stosunek pól części szarej do białej.

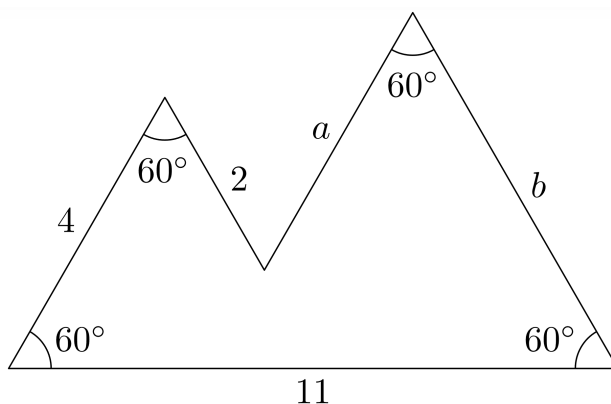


Zadanie 4. W szufladzie Kasi leży 10 niesparowanych par skarpetek. Kasia wie, że każda para ma inny kolor. Ile skarpetek musi wyciągnąć (bez zwracania), aby mieć pewność, że wśród wyciągniętych znajdują się 2 tego samego koloru.

Zadanie 5. Jarek, największa gwiazda wśród architektów, chce zbudować bardzo nowoczesną pięciokątną willę na prostokątnej posesji o wymiarach $35 \text{ m} \times 25 \text{ m}$. Powierzchnia działki przeznaczona na budowę jest zaznaczona na rysunku obok (kolejne kropki na brzegu wyznaczają odległości 5 m). Jaką część powierzchni posesji zajmuje pięciokąt, na planie którego zostanie zbudowana willa?



Zadanie 6. Na poniższym obrazku przedstawiono pięciokąt, w którym dane są niektóre miary kątów i długości boków. Wyznacz $a + b$.



Zadanie 7. Asia i Bartek zbierali kamyczki na plaży. Asia zebrała o 49 kamyczków więcej niż Bartek, więc postanowiła się z nim podzielić. Dała Bartkowi 11 swoich kamyczków. O ile więcej kamyczków ma teraz Asia niż Bartek?

Zadanie 8. Trzy siostry są w różnym wieku, a średnia ich wieku wynosi 10 lat. Każda z sióstr wyznaczyła poprawnie średnią wieku dwóch pozostałych sióstr, przy czym dwa z tych wyników wyniosły odpowiednio 11 i 12 lat. Ile lat ma najstarsza siostra?

Zadanie 9. Do sklepu z drobiazgami przywieziono 200 ceramicznych skarbonek. Ustalono cenę sprzedaży 35 zł za sztukę. Po sprzedaniu 30% skarbonek zauważono, że część z nich ma ślady pęknięć. Uszkodzone skarbonki odłożono. Żeby uzyskać jednak zaplanowany przychód pozostałe sprzedano po 50 zł za sztukę. Ile było uszkodzonych skarbonek?

Zadanie 10. Jeśli średnia arytmetyczna czterech różnych liczb całkowitych dodatnich wynosi 10, to jaka jest największa możliwa wartość jednej z tych liczb?

Zadanie 11. Uczniowie na lekcji przygotowują solanki o różnym stężeniu. Nauczyciel zapytał uczniów jak stężony musi być roztwór soli 1 o masie 2 kg, aby po dodaniu soli 2 o stężeniu 10% otrzymać sól 3 o stężeniu 15% i masie 7 kg. Odpowiedz na pytanie nauczyciela.

Zadanie 12. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy taką liczbę x , że a podniesione do potęgi x daje liczbę b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Korzystając z informacji podanych powyżej, oblicz wartość wyrażenia

$$\left(\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_2 512\right)^2.$$

Zadanie 13. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Odcinki AF i BC przedłużono tak, że się przecinają. Niech P będzie tym punktem przecięcia. Znaleźć stosunek:

$$\frac{|AP| + |BP|}{|DE|}.$$

Zadanie 14. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrany dzielnik naturalny liczby 20 jest mniejszy niż 5?

Zadanie 15. Szóstka przyjaciół bawi się w detektywów i szpiegów. Jeden z nich został wybrany na detektywa i na chwilę wyszedł z pokoju. Pozostała piątka wybiera spośród siebie dwóch szpiegów. Szpiegzy zawsze kłamią, a wszyscy pozostali zawsze mówią prawdę. Detektyw wraca do pokoju i próbuje ustalić, kto jest szpiegiem. Piątka przyjaciół odpowiedziała mu w następujący sposób (liczba w nawiasie odpowiada numerowi gracza).

Ala (1): „Dominik to szpieg.”

Bartek (2): „Celina nie jest szpiegiem.”

Celina (4): „Bartek na pewno nie jest szpiegiem.”

Dominik (8): „Edek nie jest szpiegiem.”

Edek (16): „Bartek jest szpiegiem.”

Jaka jest suma numerów szpiegów?

Zadanie 16. Pięć przyjaciółek chce podzielić między siebie pięć deserów (każdego jest dokładnie jedna sztuka i każda dziewczyna ma zjeść dokładnie jeden deser w całości): *lody truskawkowe*, *lody czekoladowe*, *ciasto waniliowe*, *ciasto czekoladowe*, *truskawki*. Ala nie lubi truskawek. Dominika jest fanką ciast, ale ma uczulenie na czekoladę, a Celina kocha świeże owoce. Basia ma ochotę na coś truskawkowego. Ela woli ciasto od lodów. Co ma zjeść Ala, żeby wszystkie koleżanki były zadowolone?

Zadanie 17. Dany jest trójkąt, którego dwa kąty są równe 30° i 105° . Bok naprzeciw kąta 30° ma długość $2\sqrt{2}$. Znajdź długość boku naprzeciw kąta 105° .

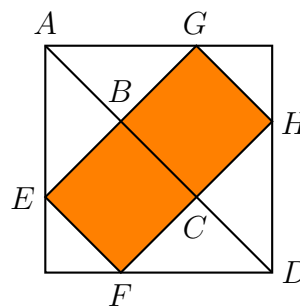
Zadanie 18. Patryk tworzy plan nauki na najbliższych pięć godzin. Chce poświęcić trzy jednogodzinne bloki nauki matematyce i dwa jednogodzinne bloki nauki fizyce. Na ile sposobów Patryk może zaplanować te pięć godzin?

Zadanie 19. Beczka z wodą waży 120 kg. Gdy odlejemy 75% wody, to waga beczki z wodą będzie wynosić x kg. Ile waży woda, a ile beczka? Jakie warunki musi spełniać liczba x , by zadanie miało rozwiązanie? Odpowiedź podaj w formie $a < x < b$.

Zadanie 20. Maja ma o 3 lata więcej niż Tosia. Lena za 5 lat temu miała 2 razy mniej lat mniej niż Hania będzie miała za 3 lata. 2 lata temu cztery dziewczyny miały w sumie 37 lat, a Hania za rok będzie miała tyle lat, ile Tosia rok temu. Ile lat będą miały w sumie Lena i Hania za 2 lata?

Zadanie 21. Przez $n!$ oznaczamy liczbę $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: ostatnie trzy cyfry w zapisie dziesiętnym liczby $n!$ to 0.

Zadanie 22. Na rysunku obok widnieją 3 kwadraty. Wyznaczyć pole pomarańczowego obszaru wiedząc, że długość boku największego kwadratu wynosi 3.



Zadanie 23. Romb zbudowany jest z 2 trójkątów równoramiennych o bokach 6 m, 60 dm, 800 cm. Oblicz pole tego rombu. Wynik podaj w metrach kwadratowych.

Zadanie 24. Kran A napełnia wannę w 15 min, natomiast kran B w 20 min. Niestety korek w wannie jest nieszczelny i w ciągu 60 min cała woda wypływa z wanny. Po ilu minutach napełniona będzie cała wanna, jeżeli na początku odkręcimy jednocześnie oba krany?

Zadanie 25. Oskar napisał sumę kwadratów dwóch liczb, jak na rysunku. Niestety, niektóre cyfry są niewidoczne z powodu zalania atramentem. Jaka jest ostatnia cyfra pierwszej liczby?

$$(23\text{---})^2 + (1\text{---}2)^2 = 7133029$$

Zadanie 26. Podaj czwórkę liczb (x, y, z, t) spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ y + z + t = 15 \\ x + z + t = 12 \end{cases}$$

Zadanie 27. Przedstawione zostały pewne liczby w języku Quenya¹:

<i>neldë</i>	3	<i>enquë yucainen</i>	26
<i>canta</i>	4	<i>minë nelcainen</i>	31
<i>lempë</i>	5	<i>cancainen</i>	40
<i>otso</i>	7	<i>atta tolcainen</i>	82
<i>tolto</i>	8	<i>atta tolcainen tuxa</i>	182
<i>nelcëa</i>	13	<i>nertë nelcainen lemtuxa</i>	539
<i>encëa</i>	16		

Jak słownie w języku Quenya zapiszemy wynik poniższego działania?

$$tolcëa + enquë cancainen$$

Zadanie 28. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, w których stosunek obwodów wynosi 7 : 5. Ile jest równy stosunek pól tych prostokątów?

Zadanie 29. Dany jest 18-kąt foremny. Jaka jest suma miar trzech sąsiadujących kątów wewnętrznych w tej figurze?

Zadanie 30. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n , że:

- $n + 1$ jest podzielne przez 6.
- $n - 2$ jest podzielne przez 11.
- n jest podzielne przez dokładnie jedną z liczb 5, 7.

Zadanie 31. Dwóch ludzi jedzie rowerami jeden ku drugiemu. Dzieli ich 20 km. W momencie, gdy wyjeżdżają, mucha siedząca na kierownicy jednego zaczyna lot w stronę drugiego. Dolatuje do drugiej kierownicy i wraca na pierwszą. Mucha lata tam i z powrotem tak długo, aż rowery się spotkają. Jeżeli każdy rower jechał ze stałą prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a mucha latała również ze stałą prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to ile kilometrów w sumie pokonała mucha?

Zadanie 32. Bartek ma w swojej szufladzie skarpety w czterech kolorach: 8 czerwonych, 6 żółtych, 5 zielonych i 4 niebieskie. Ile najwięcej skarpet może wyciągnąć by mieć szansę, że wśród wyciągniętych nie będzie żadnego z poniższych układów:

- 3 czerwone i 4 zielone
- 4 czerwone i 3 żółte
- trzy skarpety różnych kolorów.

Zadanie 33. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych x i y :

$$\begin{cases} x^2 + x + \sqrt{x} = y^2 + y + \sqrt{y} \\ x^2 + xy + y^2 = 48 \end{cases}$$

W odpowiedzi podaj wartość sumy $x + y$.

¹Quenya to fikcyjny język stworzony przez J.R.R. Tolkiena, inspirowany łaciną, fińskim i greką, używany głównie przez elfów w Śródziemiu jako język ceremonialny i literacki. Charakteryzuje się bogatą gramatyką, rozbudowaną fleksją i melodyjnym brzmieniem, co czyni go jednym z najbardziej rozwiniętych języków w twórczości Tolkiena.

Zadanie 34. W okrąg o środku O wpisano trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, przy czym $|AB| = |AC| = |DE| = |OA|$. Znaleźć stosunek $\frac{P_{ABC}}{P_{ADE}}$. Wynik zapisać w najprostszej postaci (zlikwidować niewymierność mianownika).

Zadanie 35. W obozie matematycznym 1 LO uczestniczy dokładnie 60 młodych olimpijczyków. Dziesięciu z nich ma na obozie dokładnie jednego kolegę z klasy. Dziewięciu ma dokładnie dwóch, a cztery osoby posiadają dokładnie trzech. Z ilu różnych klas są osoby na tym obozie?

Zadanie 36. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$9a + 5b = 2025$$

w liczbach całkowitych $a, b \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 37. Wiadomo, że $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 2$. Ile wynosi $a^4 + b^4$?

Zadanie 38. Na haku, u sufitu, na wysokości 3 metrów, zaczepiona jest lina, której długość, po obu stronach haka, jest taka sama. 1 metr liny waży 300 gramów. Na jednym końcu liny zaczepiła się małpka, która trzyma w łapce banana, zaś na drugim końcu liny zaczepiono przeciwwagę równą wadze małpki. 1 centymetr banana waży 10 gramów. Długość całkowita liny, w metrach, stanowi $\frac{1}{3}$ wieku małpki, wyrażonego w latach, a waga małpki, w gramach, jest równa 200-krotnej liczbie lat matki tej małpki. Łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat. Dodając 2-krotność wagi małpki i 40-krotność wagi banana, otrzymuje się ten sam rezultat, jak przy dodaniu 10-krotnej wagi liny oraz wagi użytej przeciwwagi. Wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy ona będzie miała obecny wiek swojej matki. Oblicz długość banana i podaj ją w centymetrach.

Zadanie 39. Dane są liczby całkowite a i b takie, że:

$$\frac{\text{NWW}(a, b)}{\text{NWD}(a, b)} = 6.$$

Ile jest możliwych wartości ilorazu $\frac{a}{b}$?

Zadanie 40. Magda ma pudełko zapalek różnej długości i chce ułożyć z nich trójkąt o dodatnich kątach. Mateusz nie chce żeby jej się to udało, więc podmienił zawartość tego pudełka tak, że zadanie jest teraz niemożliwe do wykonania. Wiedząc, że pudełko ma wymiary $6 \text{ cm} \times 11 \text{ cm} \times 17 \text{ cm}$ i że Mateusz nie użył zapalek krótszych niż 1 cm, znajdź największą liczbę zapalek, które mogą znajdować się w pudełku po jego sabotażu.