



Zadanie 1. W trapezie $ABCD$ punkty M i N to odpowiednio środki ramion BC i DA . Oblicz stosunek

$$\frac{P_{ABM} + P_{CDN}}{P_{ABCD}}.$$

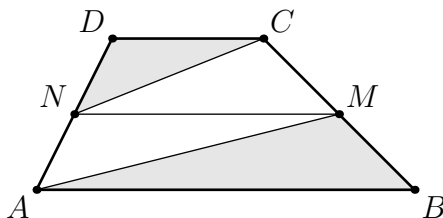
Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Pole całego trapezu wynosi oczywiście $\frac{1}{2}(a+b) \cdot 2h$. Policzmy teraz pola szukanych trójkątów. Zauważmy, że prosta MN jest linią środkową tego trapezu. Oznacza to, że dzieli również wysokość trapezu na dwa odcinki o równych długościach. Są one prostopadłe do podstaw AB, CD , więc także równoległe do wysokości $\triangle ABM, \triangle CDN$ opuszczonych z wierzchołków M, N , a jako, że $MN \parallel AB \parallel CD$, to są tych samych długości równych $\frac{2h}{2} = h$. Zatem możemy obliczyć sumę

$$P_{ABM} + P_{CDN} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(a+b).$$

Zatem otrzymujemy końcowy wynik

$$\frac{P_{ABM} + P_{CDN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}h(a+b)}{\frac{1}{2}(a+b)2h} = \frac{1}{2}.$$



 **Zadanie 2.** Wiedząc, że $a + b + c = 0$ oraz $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wykaż, że

$$32(a^4 + b^4 + c^4)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Źródło zadania: *Matematyka Olimpijska – Algebra i Teoria Liczb*. A. Neugebauer, wydawnictwo „Omega”, Kraków 2022

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Oznaczmy

$$S = 32(a^4 + b^4 + c^4).$$

Z pomocą wzorów Girarda-Newtona możemy zapisać S jako iloczyn elementarnych wielomianów symetrycznych trzech zmiennych (więcej na ten temat w książce *Matematyka Olimpijska – Algebra i Teoria Liczb*. A. Neugebauer, wydawnictwo „Omega” – rozdział 6) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} S = 32 &(((a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc) \cdot \\ &\cdot (a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + (a + b + c)abc). \end{aligned}$$

Podstawmy daną w zadaniu wartość $a + b + c = 0$.

$$\begin{aligned} S &= 32(-(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)) = \\ &= -32((a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca)(ab + bc + ca) = \\ &= -32 \cdot (-2)(ab + bc + ca)^2 = 8(ab + bc + ca)^2. \end{aligned}$$

Wiemy, że $a, b, c \in \mathbb{Z}$, więc również $8(ab + bc + ca) \in \mathbb{Z}$, zatem S jest kwadratem liczby całkowitej, co należało wykazać.