



Zadanie 1. Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Udowodnij, że różnica pewnych dwóch z nich jest liczbą dwucyfrową postaci $\overline{aa}$.

Źródło: *Matematyka Olimpijska – Kombinatoryka*. A. Neugebauer, wydawnictwo „Omega”, Kraków 2022

Wybór zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Zauważmy, że wszystkie liczby dwucyfrowe postaci aa można wyrazić jako $11 \cdot a$. Zatem musimy wykazać, że któraś z różnic jest podzielna przez 11 i dwucyfrowa.

Mamy 11 różnych reszt modulo 11, więc co najmniej dwie z dwunastu danych liczb muszą mieć tę samą resztę modulo 11. Zatem ich różnica będzie przystawać do 0 (mod 11).

Wiemy, że liczby są różne, więc rozpatrywana różnica nie wynosi 0, jest równa co najmniej 11. Ponadto są dwucyfrowe, więc różnica ma nie więcej niż 2 cyfry. Oznacza to, że jest dwucyfrową liczbą podzielną przez 11, czyli ma postać $\overline{aa}$.



Zadanie 2. Niech $n \in \mathbb{Z}_+$. Pokaż, że liczba $2(n^2 + 1) - n$ nigdy nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Źródło: Czesko-polsko-słowackie zawody matematyczne Juniorów 2012 – zawody drużynowe

Wybór zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Załóżmy „nie wprost”, że liczba ta jest kwadratem liczby całkowitej i przyjmijmy dla $k \in \mathbb{Z}$

$$2(n^2 + 1) - n = k^2.$$

Pomnóżmy równanie obustronnie przez 8 i zwińmy do kwadratu:

$$(4n - 1)^2 + 15 = 8k^2.$$

Skoro $3 \mid 15$, to $(4n - 1)^2 \equiv 8k^2 \pmod{3}$. Kwadraty liczb całkowitych przystają do 0 lub 1 (mod 3), zaś prawa strona to 0 lub 2 (mod 3), więc obie liczby muszą być podzielne przez 3, czyli jako kwadraty o wszystkich czynnikach w parzystej potęgce również $9 \mid (4n - 1)^2$, $9 \mid k^2$ (jako że 8 jest względnie pierwsze z 3). Ponadto $15 \equiv 6 \pmod{9}$, co daje nam sprzeczność, ponieważ $(4n - 1)^2 + 15 \equiv 0 + 6 = 6 \not\equiv 0 \equiv 8k^2 \pmod{9}$. Zatem rozpatrywana liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej, co należało wykazać.