



Zadanie 1. Ciąg Fibonacciego określony jest następującym wzorem:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(dla n całkowitych dodatnich). Ustal czy liczba F_{2009} jest parzysta.

Źródło: *Zbiór zadań z kółka matematycznego cz.1* Michał Niedźwiedź, wydawnictwo „Omega” 2022

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Wiadomo, że F_1 i F_2 są nieparzyste. Zatem F_3 jest parzyste jako suma dwóch liczb nieparzystych, zaś F_3 i F_4 są nieparzyste jako suma liczby parzystej i nieparzystej. Dalej sytuacja się powtarza czyli liczby układają się wg reguły $n, n, p, n, n, p, \dots$. Liczby parzyste występują na miejscach podzielnych przez 3. 2009 nie jest podzielne przez 3 zatem F_{2009} jest nieparzysta.

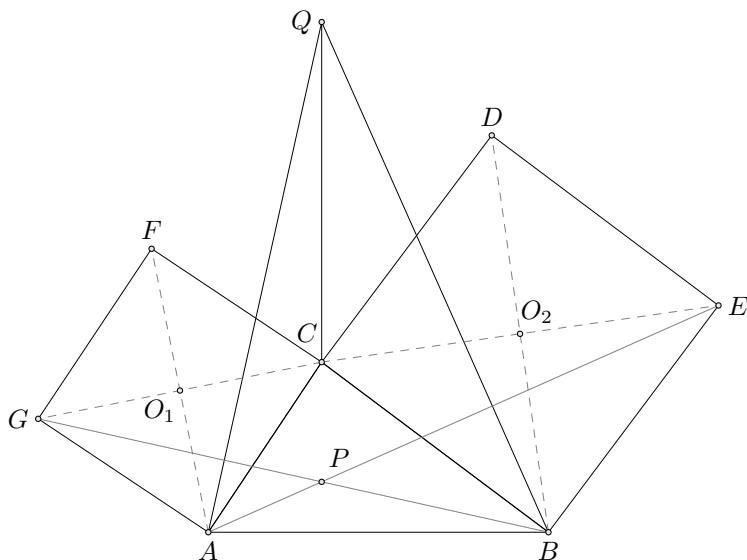


Zadanie 2. Na bokach BC i AC trójkąta ABC – na jego zewnątrz – budujemy kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Proste AE i BG przecinają się w punkcie P . Wykazać, że proste CP i AB są prostopadłe.

Źródło: *Matematyczna liga zadaniowa* Wojciech Klemens, Laura Meissner, Marta Mościcka, Weronika Ormaniec, Tomasz Szymczyk, Wydawnictwa "Omega"

Wybór Zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Niech punkt O_1 będzie środkiem symetrii kwadratu $ACFG$, a O_2 – kwadratu $BCDE$. Rozpatrzymy obrót płaszczyzny wokół punktu O_1 o kąt 90° (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara).



W przekształceniu tym punkt A przechodzi na punkt C . Niech punkt Q będzie w tym przekształceniu obrazem punktu B . Wtedy odcinek CQ ma tę samą długość co odcinek AB oraz proste AB i CQ są prostopadłe. Jednocześnie obrazem odcinka GB jest odcinek AQ . Stąd $GB \perp AQ$, czyli prosta GB zawiera wysokość trójkąta ABQ poprowadzoną z wierzchołka B .

Analogicznie – rozpatrując obrót płaszczyzny wokół punktu O_2 o kąt -90° (o kąt 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara) – dostajemy, że obrazem AB

jest znów odcinek CQ oraz prosta AE zawiera wysokość trójkąta ABQ poprowadzoną z wierzchołka A . Zatem punkt P jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABQ .

Ponieważ proste CQ i PQ są prostopadłe do prostej AB , więc pokrywają się. Stąd prosta CP jest prostopadła do prostej AB .