



Zadanie 1. Rozpatrujemy liczby całkowite modulo $n, n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Odwrotnością liczby całkowitej $x \pmod{n}$ jest liczba całkowita y , jeśli zachodzi $x \cdot y = 1 \pmod{n}$. Wykaż, że liczba x ma odwrotność modulo n wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{NWD}(n, x) = 1$.

Źródło zadania: Magdalena Ciochoń, „Kongruencje”, praca konkursowa pisaną pod kierunkiem mgr Agnieszki Batko

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rośczał

Rozwiązanie: Pokażemy implikację w obie strony:

$$\text{Liczba ma odwrotność} \implies \text{NWD}(n, x) = 1.$$

Założmy więc „nie wprost”, że liczba x ma odwrotność y , czyli $x \cdot y = 1 \pmod{n}$, ale $\text{NWD}(n, x) > 1$. Wykażemy sprzeczność.

Oznaczmy $\text{NWD}(n, x) = d > 1$ oraz $x \cdot y = kn + 1, k \in \mathbb{Z}_+$. Wtedy oczywiście $d \mid n, d \mid kn$. Z algorytmu Euklidesa możemy stwierdzić, że $\text{NWD}(kn, kn+1) = \text{NWD}(kn, 1) = 1$, zatem dla przyjętego $d > 1$ zachodzi $d \nmid kn + 1$. Wiemy jednak, że $kn + 1 = x \cdot y$ oraz $d \mid x$, co daje nam pożądaną sprzeczność z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze obu stron równości. Zatem zachodzi implikacja w pierwszą stronę. Teraz przyjrzyjmy się implikacji w drugą stronę:

$$\text{NWD}(n, x) = 1 \implies \text{liczba ma odwrotność}.$$

Skoro $\text{NWD}(n, x) = 1$, to dla $n > 1$ wiemy, że $n \nmid x, x \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Rozpatrzmy wszystkie możliwe wartości $y \pmod{n}$. Mamy możliwe iloczyny $x \cdot 0, x \cdot 1, x \cdot 2, \dots, x \cdot (n - 1)$.

Żadne dwa różne iloczyny nie mogą dawać takiej samej reszty modulo n , bo gdyby co najmniej dwa przystawały do tej samej liczby, ich różnica, będąca niezerową wielokrotnością x , przystawałaby do $0 \bmod n$, co jest sprzeczne z założeniem, że x i n są względnie pierwsze. Zatem wszystkie n iloczynów dają różne reszty modulo n , w szczególności jedna z nich przystaje do 1. Wartość, przez którą mnożymy x w tym wypadku, jest właśnie jego istniejącą odwrotnością. Zatem zachodzi również implikacja w drugą stronę.

Pokazanie tych dwóch stron implikacji daje nam równoważność, co kończy dowód zadania.



Zadanie 2. Marek i Darek mają po dwie identyczne butelki, częściowo napełnione sokiem. Wiadomo, że gdyby Darek miał dwa razy więcej soku, to miałby go więcej, niż gdyby Marek dostał dodatkową pełną butelkę. Oznaczmy jako m ilość soku posiadaną przez Marka minus ilość soku mieszczącą się w jednej butelce. Analogicznie oznaczmy d dla Darka. Znajdź najmniejszą wartość, jaką może przyjmować wyrażenie

$$2d^3 + 3d^2m - m^3.$$

Autor zadania: Robert Rośczał

Rozwiązanie: Niech pojemność jednej butelki wynosi B , a ilości soku posiadane przez Marka i Darka to odpowiednio M i D . Z definicji mamy

$$m = M - B, \quad d = D - B.$$

Warunek zadania:

$$2D > M + B \iff 2(d + B) > (m + B) + B \iff 2d > m.$$

Przekształćmy więc wyrażenie

$$2d^3 + 3d^2m - m^3 = (2d - m)(d^2 + 2dm + m^2) = (2d - m)(d + m)^2.$$

Z nierówności $2d > m$ otrzymujemy $(2d - m) > 0$, natomiast $(d + m)^2 \geq 0$ zawsze. Zatem

$$2d^3 + 3d^2m - m^3 \geq 0,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $d + m = 0$, czyli $M + D = 2B$. Jest to możliwe jeżeli na przykład Darek ma dwie butelki, każda pełna w $\frac{3}{4}$, a Marek dwie pełne w $\frac{1}{4}$, co spełnia warunek o nierówności.