

 **Zadanie 1.** Znajdź liczbę sposobów na które można rozdzielić n nierozróżnialnych owoców między k dzieci zakładając, że każde musi otrzymać co najmniej dwa.

Autor zadania: Robert Rośczał

Rozwiązanie: Niech x_i oznacza liczbę owoców otrzymanych przez i -te dziecko. Mamy

$$x_1 + \dots + x_k = n, \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Wprowadźmy nowe zmienne $y_i = x_i - 2$. Wówczas $y_i \geq 0$ i

$$y_1 + \dots + y_k = n - 2k.$$

Liczba nieujemnych rozwiązań całkowitych równania powyżej (rozwiązanie klasyczne „stars and bars”) wynosi

$$\binom{(n - 2k) + k - 1}{k - 1} = \binom{n - k - 1}{k - 1},$$

pod warunkiem że $n - 2k \geq 0$ (w przeciwnym razie rozwiązań nie ma).

$\text{Dla } n \geq 2k \text{ liczba sposobów} = \binom{n - k - 1}{k - 1}. \quad \text{Dla } n < 2k \text{ — } 0.$
--

 Zadanie 2. Udowodnij, że równanie

$$y^2 + x = \frac{x^2}{2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y .

Autor zadania: Robert Rościzak

Rozwiązanie:

Dowód. Rozważamy równanie

$$y^2 + x = \frac{x^2}{2}.$$

Po pomnożeniu przez 2 otrzymujemy

$$x^2 - 2x - 2y^2 = 0,$$

czyli

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 2y^2}.$$

Aby x było całkowite, liczba $1 + 2y^2$ musi być kwadratem całkowitym. Niech $t^2 = 1 + 2y^2$. Wtedy

$$t^2 - 2y^2 = 1.$$

Jest to równanie Pella. Wiadomo, że ma ono nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych (t, y) .

Rozwiązania te można otrzymać z tożsamości

$$t_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

co daje rekurencję

$$t_{n+1} = 3t_n + 4y_n, \quad y_{n+1} = 2t_n + 3y_n,$$

z warunkiem początkowym $(t_0, y_0) = (1, 0)$.

Ponieważ $x = 1 + t$, zatem dla każdego n rozwiązanie równania początkowego dane jest przez

$$(x_n, y_n) = (1 + t_n, y_n).$$

Łącząc oba wzory otrzymujemy bezpośrednią rekurencję dla par (x_n, y_n) :

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n - 2, \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n - 2,$$

z warunkiem początkowym $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Na przykład:

$$(x_0, y_0) = (2, 0), \quad (x_1, y_1) = (4, 2), \quad (x_2, y_2) = (14, 10), \quad (x_3, y_3) = (52, 36), \dots$$

W ten sposób otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych równania

$$y^2 + x = \frac{x^2}{2}.$$

□