

 **Zadanie 1.** Jeśli N jest dodatnią liczbą całkowitą, to ile liczb całkowitych leży między $\sqrt{N^2 + N + 1}$ i $\sqrt{9N^2 + N + 1}$?

Źródło zadania: Kangur matematyczny 2022 student

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Jako iż nie ma pierwiastków z liczb $\sqrt{N^2 + N + 1}$ i $\sqrt{9N^2 + N + 1}$, to trzeba znaleźć liczby całkowite między którymi te liczby się mieszczą. Zaczynając z $\sqrt{N^2 + N + 1}$ Jest to definitywnie liczba większa od N , i mniejsza od $N + 1$, co można też zapisać jako $\sqrt{N^2 + 2N + 1}$ Zatem liczba $\sqrt{N^2 + N + 1}$ znajduje się pomiędzy N i $N + 1$.

Następnie rozpatrujemy $\sqrt{9N^2 + N + 1}$ Od razu można zauważyć że jest to liczba większa od $2N + 1$, ponieważ $\sqrt{4N^2 + 4N + 1} < \sqrt{9N^2 + N + 1}$ po przekształceniu $5N^2 - 3N > 0$, co skoro liczba N jest dodatnia całkowita, musi być prawdą.

$\sqrt{9N^2 + N + 1}$ to też liczba mniejsza od $3N + 1$: $\sqrt{9N^2 + 6N + 1} > \sqrt{9N^2 + N + 1}$

Zatem znajduje się pomiędzy $2N + 1$ i $3N + 1$.

Zbierając wszystkie informacje widzimy że pomiędzy dwoma danymi liczbami są następujące liczby całkowite: $N + 1$ i $N + 2$. A więc 2 liczby naturalne.

Odpowiedź: 2.

 **Zadanie 2.** Wiedząc, że:

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$$

wyznacz

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) \quad (1)$$

Wyznamy $ab + bc + ca$: ze wzoru $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ wiemy, że:

$$36 = 14 + 2(ab + bc + ca)$$

$$2(ab + bc + ca) = 22$$

$$ab + bc + ca = 11$$

Wstawiając do (1)

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2 \cdot (14 - 11) = 6.$$