

 **Zadanie 1.** Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność

$$x^2 + x \leq y.$$

Udowodnij, że $y^2 + y \geq x$

Źródło zadania: XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów — zawody drugiego stopnia

Wybór zadania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Wiadomo że

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

Przekształcając równanie $x^2 + x \leq y$:

$$x^2 + x - y \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$-x^2 - x + y \geq 0$$

Łączymy dwa równania $x^2 + y^2 \geq 0$ i $-x^2 - x + y \geq 0$

$$x^2 + y^2 - x^2 - x + y \geq 0$$

Po przekształceniu dostajemy wynik

$$y^2 + y \geq x.$$

Co kończy dowód.

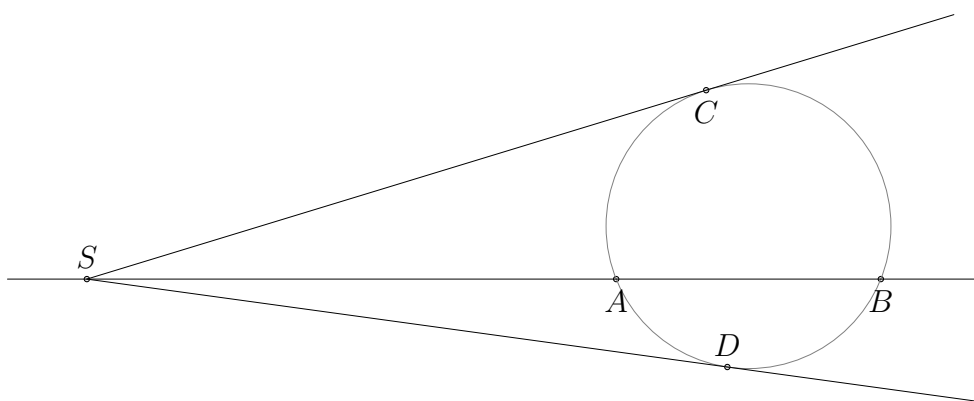
Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC Prosta styczną do okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzona z punktu C przecina prostą AB w punkcie S . Wykaż, że

$$\frac{AS}{SB} = \left(\frac{AC}{CB} \right)^2.$$

Źródło zadania: Obóz naukowy w Porębie Wielkiej

Wybór zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie:



Zróbmy rysunek i poprowadźmy styczną do okręgu w punkcie D . Z twierdzenia o czapeczkach wiemy że $SD = SC$, z racji styczności prostych SC i SD wiem że kąt $SDA = ABD = \alpha$. Z potęgi punktu S wiemy, że

$$SC^2 = SA \cdot SB = SD^2,$$

czyli $SC^2 = SA \cdot SB \quad / : SB^2$ dostajemy

$$\left(\frac{SC}{SB} \right)^2 = \frac{SA}{SB}.$$

Z twierdzenia Ptolemeusza wiemy że

$$AD \cdot CB = DB \cdot AC$$

czyli

$$AC/CB = AD/DB,$$

więc tą tezę można zapisać jako

$$\frac{AS}{SB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = \left(\frac{AD}{DB}\right)^2.$$

Wróćmy to potęgi punktu, wiemy że $SB = \frac{SD^2}{SA}$, zatem wystawiając

$$\frac{AS}{\frac{SD^2}{SA}} = \frac{AS^2}{SD^2}.$$

Upraszczając tezę otrzymujemy:

$$\left(\frac{AS}{SD}\right)^2 = \left(\frac{AD}{DB}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{AS}{SD}\right) = \left(\frac{AD}{DB}\right).$$

Z racji że $\sphericalangle SDA = \sphericalangle ABD = \alpha$, niech $\sphericalangle DAB = \beta$, czyli $\sphericalangle SAD = 180 - \beta$.
Zatem możemy zapisać twierdzenie Sinusów dla trójkątów : SAD i DAB . Zatem

$$\frac{SA}{\sin \alpha} = \frac{SD}{\sin (180 - \beta)} = \frac{SD}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{SA}{SD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

analogicznie

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{DB}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

ckd.