

 **Zadanie 1.** Udowodnij, że

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2025}} > 200.$$

**Autor zadania:** Tomasz Kossakowski

**Rozwiązanie:**

*Sposób 1:*

Niech  $x_k = \sqrt[3]{k}$  dla  $k = 1, 2, \dots, 2025$ . Zastosujemy najpierw nierówność Cauchy'ego w formie Engela:

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{2025} \frac{1^2}{x_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{2025} 1\right)^2}{\sum_{k=1}^{2025} x_k} = \frac{2025^2}{\sum_{k=1}^{2025} x_k}.$$

Zastosujmy teraz nierówność średnich potęgowych dla potęg  $p = 1$  i  $q = 3$  (dla dodatnich liczb i  $p < q$  mamy  $M_p \leq M_q$ ), w postaci

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^3 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^3.$$

Dla  $x_k = \sqrt[3]{k}$  i  $n = 2025$  daje to

$$\left(\frac{1}{2025} \sum_{k=1}^{2025} \sqrt[3]{k}\right)^3 \leq \frac{1}{2025} \sum_{k=1}^{2025} (\sqrt[3]{k})^3 = \frac{1}{2025} \sum_{k=1}^{2025} k.$$

Stąd

$$\sum_{k=1}^{2025} \sqrt[3]{k} \leq 2025 \left(\frac{1}{2025} \sum_{k=1}^{2025} k\right)^{1/3}.$$

Obliczamy sumę arytmetyczną:

$$\sum_{k=1}^{2025} k = \frac{2025 \cdot (2025 + 1)}{2} = \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013.$$

Tak więc

$$\sum_{k=1}^{2025} \sqrt[3]{k} \leq 2025 \cdot 1013^{1/3}.$$

Wróćmy do Engela:

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \geq \frac{2025^2}{\sum_{k=1}^{2025} \sqrt[3]{k}} \geq \frac{2025^2}{2025 \cdot 1013^{1/3}} = \frac{2025}{1013^{1/3}} > 200.$$

Wobec tego

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} > 200.$$

*Sposób 2:*

Funkcja  $f(x) = x^{-1/3}$  jest malejąca, wtedy:

$$\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \int_1^{2026} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{x=1}^{2026} = \frac{3}{2} \cdot 2026^{2/3} - \frac{3}{2} > 238.$$

 **Zadanie 2.** Niech  $\sigma$  będzie liczbą złożoną. Przypuśćmy, że równanie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\sigma}$$

jest spełnione przez pewne dodatnie liczby całkowite  $a, b$ . Wykazać, że istnieją parami różne pary  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$  dodatnich liczb całkowitych różne od  $(a, b)$ , które również spełniają to równanie.

**Autor zadania:** Bartosz Trojanowski

**Rozwiązanie:** dowodnimy, że wszystkie pary  $a, b, \sigma$  spełniające dane równanie są postaci  $a = kx(x + y), b = ky(x + y), \sigma = kxy$ .

Mnożąc to równanie przez  $ab\sigma$  dostajemy

$$\sigma(a + b) = ab \iff (a - \sigma)(b - \sigma) = \sigma^2.$$

Jeśli  $NWD(a, b, \sigma) > 1$ , to możemy równanie to podzielić przez  $NWD(a, b, \sigma)$ , gdyż obie strony są tego samego stopnia. Zatem możemy bez straty ogólności przyjąć, że  $NWD(a, b, \sigma) = 1$ . Oczywiście  $\sigma > 1$ , więc  $\sigma$  posiada dzielnik pierwszy  $p$ . Zatem  $2v_p(\sigma) = v_p((a - \sigma)(b - \sigma)) = v_p(a - \sigma) + v_p(b - \sigma)$ . Jeśli obie te liczby są podzielne przez  $p$ , to  $p \mid a, b, \sigma$ , co przeczy względnej pierwszości  $a, b, \sigma$ . Zatem wykładnik  $p$ -adyczny jednej z liczb  $a - \sigma, b - \sigma$  jest równy  $2v_p(\sigma)$ . Powtarzając to dla każdej liczby pierwszej, dostajemy że liczby  $a - \sigma, b - \sigma$  są kwadratami liczb całkowitych. Zatem  $a - \sigma = x^2, b - \sigma = y^2$  dla pewnych  $x, y$ . Stąd mamy  $\sigma^2 = x^2 y^2$ , czyli  $\sigma = xy$ . Zatem  $a = x(x + y), b = y(x + y)$ . Możemy również pomnożyć liczby  $a, b, \sigma$  przez pewne  $k$ , które jest wcześniej odrzuconym NWD.

Pozostaje więc wykazać, że każdą liczbę złożoną  $\sigma$  da się przedstawić w postaci  $kxy$  na co najmniej 4 sposoby. Skoro  $\sigma$  jest złożone, to ma dwa różne dzielniki  $p, q > 1$ . Niech  $\sigma = pqA$  ( $A$  może być oczywiście równe 1). Wystarczy wtedy wziąć trójki:  $(k, x, y) = (pq, A, 1), (p, A, q), (q, A, p), (1, Ap, q)$ . ■