

 **Zadanie 1.** Pewien pływak płynął w górę rzeki z szybkością $v = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Następnie zawrócił i ten sam dystans pokonał płynąc w dół rzeki. Pokaż, że nie osiągnie na całej trasie (w górę i dół) szybkości średniej $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Oznaczmy przez t_1 czas, w którym pływak pokonał trasę w górę rzeki, a przez s długość tej trasy. Niech też t_2 oznacza czas przebycia drogi powrotnej z szybkością v_2 . Jako, że droga jest w obie strony taka sama mamy, że $t_1 \cdot v = s = t_2 \cdot v_2$. Z definicji prędkości średniej mamy:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot t_1 \cdot v}{t_1 + t_2}$$

Oczywiście teleportacji nie uznajemy, bo jak zostało napisane pływak płynął w drugą stronę, więc $t_2 > 0$ i $t_1 + t_2 > t_1$, więc wracając do obliczonej szybkości średniej mamy:

$$v_{\text{sr}} = \frac{2 \cdot t_1 \cdot v}{t_1 + t_2} < \frac{2 \cdot t_1 \cdot v}{t_1} = 2 \cdot v = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

A zatem w szczególności szybkości tej nie da się uzyskać, bo jakakolwiek szybkość średnia jest od niej mniejsza.

Zadanie 2. Dany jest ciąg liczb naturalnych oraz liczba pierwsza p takie, że dla $i \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi rekurencja $a_{i+1} = a_i^p + 1$. Wykaż, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego a_1 i liczby pierwszej p w omawianym ciągu zawsze na trafimy na liczbę złożoną.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Przytoczę na początek jedno istotne twierdzenie:

Małe twierdzenie Fermata: *Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej a i liczby pierwszej p zachodzi:*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Wróćmy do zadania. Rozpatrzmy je ze względu na reszty z dzielenia przez p . Dzięki przytoczonemu wcześniej twierdzeniu mamy, że $a_{i+1} = a_i^p + 1 \equiv a_i + 1 \pmod{p}$. Rozpatrując k kolejnych rekurencji dostajemy, że

$$a_{i+k} \equiv a_{i+k-1} + 1 \equiv a_{i+k-2} + 1 + 1 \equiv \dots \equiv a_i + k \pmod{p}$$

Niech więc $a_1 \equiv n \pmod{p}$. Wtedy biorąc $k = l \cdot p - n$ dostajemy, że:

$$a_{1+k} \equiv a_1 + k \equiv n + l \cdot p - n \equiv 0 \pmod{p}$$

Pozostaje zauważyć, że z tego wynika, że p dzieli a_{1+k} , a ponadto $k = l \cdot p - n$ może być dowolnie duże, podczas gdy ciąg z definicji jego rekurencji stale rośnie. Oznacza to, że jego wyrazy są dowolnie duże, a co p -ty jest podzielny przez p . Żeby zaś być pierwsze musiałyby te co p -te wyrazy być równe dokładnie p , co jest sprzeczne z monotonicznością omawianego ciągu. A więc nie wszystkie z nich są równe p i każde są przez nie podzielne. Są więc złożone. Powyższe rozumowanie zachodzi zaś dla dowolnych a_1 i p . To kończy dowód.