

 **Zadanie 1.** Na spotkaniu jest 6 osób. Niektóre pary osób są znajomymi. Udowodnij, że istnieje taka trójka osób, że wszyscy się znają, lub taka, że nikt nikogo nie zna.

Źródło zadania: Znane zadanie

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Robert Rończak

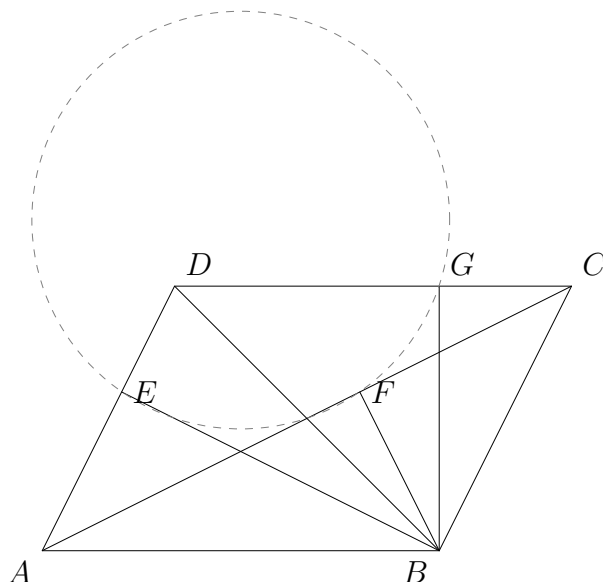
Rozwiązanie: Rozważmy osoby jako wierzchołki grafu pełnego. Pokolorujmy krawędź na niebiesko jeżeli osoby na jej końcach się znają i czerwono w przeciwnym razie. Dla pewnego wierzchołka A , na mocy Zasady Szufladkowej Dirichleta, wychodzą z niego co najmniej 3 krawędzie pewnego koloru. Oznaczmy wierzchołki na końcach tych krawędzi X, Y, Z . Jeżeli nie ma wśród nich znajomości to (X, Y, Z) spełnia warunek. W przeciwnym razie pewna para z nich się zna, i ta para plus A spełnia warunek.

Na tego typu pytania odpowiada dział matematyki znamy jako Teoria Ramseya. W tym przypadku można zastosować fakt związany z Twierdzeniem Ramseya, który mówi, że $R(3, 3) = 6$, czyli graf pełny dwukolorowany musi mieć co najmniej 6 wierzchołków aby można było znaleźć czerwoną klikę wielkości 3 lub niebieską wielkości 3.

Zadanie 2. Dany jest równoległobok $ABCD$ i punkt przecięcia jego przekątnych M . Udowodnij, że rzuty prostokątne punktu B na proste AC , CD , AD oraz punkt M są współokręgowe.

Autor zadania: Maria Janyska

Rozwiązanie:



Rozwiązanie 1. Oznaczmy rzut na prostych AD , AC , CD odpowiednio jako E , F , G .

Zauważmy, że trójkąt BMG jest równoramienny, jako że M leży na symetralnej dowolnej wysokości trapezu, czyli w szczególności również na BG . Ponadto równoramienny jest trójkąt BME z dokładnie tego samego powodu - M leży na symetralnej wysokości BE . Mamy zatem równość odcinków $MB = MG = ME$, czyli punkt M jest równoodległy od wierzchołków trójkąta EBG , zatem jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Skoro $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFB = 90^\circ$, to czworokąt $ABFE$ jest cykliczny.

Oznaczmy $\sphericalangle EFA = \alpha$. Wtedy $\sphericalangle EFM = 180^\circ - \alpha$. Możemy przenieść go więc po okręgu, $\sphericalangle ABE = \alpha$. Skoro $\sphericalangle AEB = 90^\circ$, to $\sphericalangle EAB = 90^\circ - \alpha$ oraz z własności równoległoboku i kąta prostego $\sphericalangle BGC$ mamy kolejno $\sphericalangle BCG = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle CBG = \alpha$, $\sphericalangle EBG = 90^\circ - \alpha$. Kąt środkowy oparty na łuku EG jest dwukrotnie mniejszy, czyli $\sphericalangle EMG = 2\sphericalangle EBG = 180^\circ - 2\alpha$. Zatem w trójkącie równoramiennym EMG mamy $\sphericalangle MEG = \sphericalangle MGE = \alpha$.

Skoro $\sphericalangle EFM = 180^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle MGE = \alpha$, to suma tych kątów to 180° , co dowodzi, że czworokąt $GEFM$ jest cykliczny.

Rozwiązanie 2. Niech oznaczenia punktów pozostaną takie same, jak w pierwszym rozwiązaniu.

Opiszmy okrąg na trójkącie ACD .

Zauważmy, że, jeśli prosta AC jest średnicą okręgu, to $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, to $ABCD$ jest kwadratem. Wtedy rzut B na AC pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych, zatem mamy wykazać współokręgowość trzech punktów, co zachodzi zawsze.

Załóżmy więc, że AC nie jest średnicą okręgu, niech więc styczne do tego okręgu w punktach A, C przecinają się w punkcie R (na pewno się przecinają, odrzuciliśmy warunek, gdy styczne byłyby równoległe, rozpatrując AC jako średnicę).

Oznaczmy $\sphericalangle RAD = \alpha$. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wiemy, że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC = \alpha$. Stąd wiemy, że punkty R, B są izogonalnie sprzężone w kącie $\sphericalangle CAD$. Analogicznie oznaczamy $\sphericalangle RCD = \beta$, co daje nam $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC = \beta$. Punkty R, B są więc izogonalnie sprzężone również w kącie $\sphericalangle ACD$.

Z definicji izogonalnego sprzężenia: ta para punktów jest sprzężona w dwóch kątach trójkąta ACD , dlatego jest sprzężona w tym trójkącie.

Znanym faktem jest, że rzuty prostokątne punktów izogonalnie sprzężonych na w trójkącie na jego boki leżą na jednym okręgu. Wiemy, że punkty E, F, G są rzutami punktu B na boki trójkąta ACD , pozostaje więc pokazać, że M jest rzutem punktu R na bok AC .

Wiemy jednak, że odcinki styczne do okręgu mają równe długości, $RA = RC$, czyli trójkąt ARC jest równoramienny, przy czym z definicji równoległoboku M jest środkiem odcinka AC . Wysokość w trójkącie równoramiennym opuszczona z wierzchołka między ramionami przechodzi przez połowę podstawy, czyli w naszym przypadku przez punkt M . Pokrywa się jednak ona oczywiście z rzutem prostokątnym, czyli punkt M faktycznie jest rzutem punktu R , co kończy dowód.

Rozwiązanie 3. Oznaczmy rzut na prostych AD, AC, CD odpowiednio jako E, F, G . Stosujemy na nich inwersję w okręgu o średnicy BD . Teza jest równoważna z tym, że obrazy E, F, G w tej transformacji leżą na prostej.

Zauważmy jednak, że $\sphericalangle BED = \sphericalangle BGD = 90^\circ$, czyli punkty E, G leżą na okręgu inwersyjnym. Pozostaje udowodnić, że na prostej przez nie leży obraz F . Skorzystamy do tego z Tw. o Prostej Simsona.

Zdefiniujmy punkt K na prostej AD tak, że $F'K \perp BF'$. Niech L, N będą punktami przecięcia prostej $F'K$ z odpowiednio CD, AB . Do udowodnienia tezy pozostaje udowodnić, że punkty K, L, D, A leżą na jednym okręgu. Na mocy Tw. Talesa $1 = \frac{|BM|}{|MD|} = \frac{|NF'|}{|KF'|}$, z czego wynika $\sphericalangle BKF' = \sphericalangle BNF' = 180^\circ - \sphericalangle DBN = \sphericalangle BDG$, co dowodzi upragnionej cykliczności.