

 **Zadanie 1.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

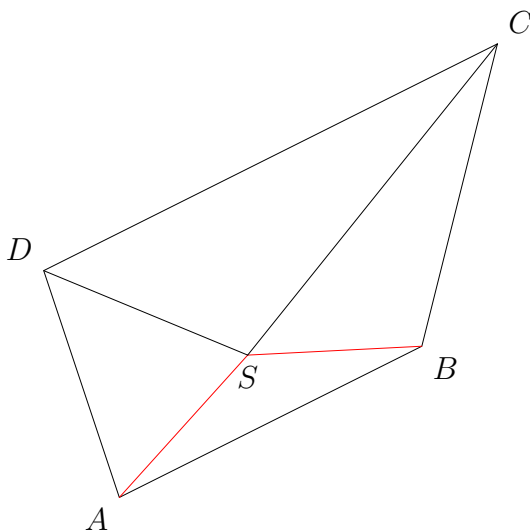
$$|AD| + |BC| = |CD|.$$

Dwusieczne kątów $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle CDA$ przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $|AS| = |BS|$.

Źródło zadania: VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów — zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maja Chlewicka

Rozwiązanie: Oznaczamy przez E taki punkt na boku CD , że $|AD| = |DE|$ i $|EC| = |CB|$. Następnie, widać że trójkąty $\triangle ADS$ i $\triangle DES$ są przystające (cecha bkb), zatem $|ES| = |AS|$. Zarówno trójkąty $\triangle ESC$ i $\triangle CSB$ są przystające, zatem $|ES| = |SB|$. Analogicznie $|AS| = |SB|$, co kończy dowód.



Zadanie 2. Na tablicy napisano liczby $1, 2, 3, \dots, 2025$. Co minutę wybieramy dwie różne liczby a i b , usuwamy je, a na ich miejsce zapisujemy liczbę $a + b - 1$. Proces powtarzamy, aż na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Jaka liczba pozostanie na końcu?

Autor zadania: Antonina Pajek

Rozwiązanie: Na początku suma wszystkich liczb to

$$S_0 = 1 + 2 + \dots + 2025 = \frac{2026 \cdot 2025}{2}.$$

Sprawdźmy, jak zmienia się suma przy jednym ruchu. Jeśli wybieramy a, b i zastępujemy je liczbą $a+b-1$, to nowa suma jest równa: $S' = S - a - b + (a+b-1) = S - 1$. Czyli po każdym ruchu suma zmniejsza się o 1. Skoro na początku mamy 2025 liczb, a zostaje 1 to musimy wykonać 2024 takie operacje. Zatem suma końcowa to

$$S_k = S_0 - 2024,$$

czyli

$$S_k = \frac{2026 \cdot 2025}{2} - 2024 = 2049301.$$