

Zadanie 1. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej t , niech $d(t)$ będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, której silnia jest podzielna przez t (na przykład $d(6) = 3$, bo $3! = 2 \cdot 3$ jest wielokrotnością 6, a $2!$ i $1!$ nie są). Rozwiązać równanie

$$d(n) = \frac{n}{2}.$$

Autor zadania: Bartosz Trojanowski

Rozwiązanie: Przez $v_p(n)$ oznaczmy wykładnik p -adyczny z liczby n .

Oczywiście n musi być parzyste. Załóżmy najpierw, że n jest potęgą 2. Mamy więc $d(2^k) = 2^{k-1}$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k . Bezpośrednio sprawdźmy, że $k = 1, 2, 4$ nie spełniają warunków zadania, a $k = 3$ spełnia. Gdy $k \geq 5$, to ze wzoru Legendre'a mamy

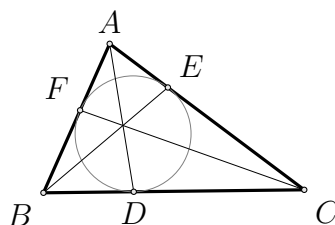
$$v_2(2^{k-2}!) = \frac{2^{k-2}}{2} + \frac{2^{k-2}}{4} + \dots \geq 2^k,$$

czyli $d(2^k) \leq 2^{k-2} < 2^{k-1}$. Stąd gdy n jest potęgą dwójki, to $n = 8$ jest jedynym rozwiązaniem. Gdy $n = 2p$ dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p , to oczywiście jest, że faktycznie $d(n) = \frac{n}{2}$. Teraz przyjmijmy, że n ma co najmniej dwa różne nieparzyste dzielniki większe od 1. Niech q będzie drugim największym takim dzielnikiem. Wtedy $q < \frac{n}{2}$, więc $d(n) \leq q < \frac{n}{2}$. Podsumowując, równanie spełniają dwukrotności liczb pierwszych oraz liczba 8. ■

- Zadanie 2.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC i okrąg nań opisany. Styczne przez punkty B i C przecinają się w D , przez C i A — w E , przez A i B — w F . Udowodnić, że AD , BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Tomasz Kossakowski

Rozwiązanie:



Zauważmy, że okrąg jest krzywą stożkową oraz proste AF , FB , BD , DC , CE oraz EA są styczne do tej krzywej, wtedy sześciokąt $AFBDCE$ jest opisany na okręgu, zatem na mocy twierdzenia Brianchona AD , BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie.