

 **Zadanie 1.** Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Zauważmy, że:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)$$

Drugi nawias ze względu na to, że $n \geq 1$ jest dodatni i większy od 1 (dokładnie jest niemniejszy od 3). By zatem nasza liczba była pierwszą pierwszy nawias musi być równy 1. A zatem:

$$n^2 - n + 1 = 1$$

$$n^2 - n = 0$$

$$n(n - 1) = 0$$

Daje nam to dwie opcje: $n = 0$ co nie należy do dziedziny (n ma być dodatnie) i $n = 1$. Dla drugiego przypadku mamy $n^4 + n^2 + 1 = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$ co jest liczbą pierwszą. A zatem jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 1$

Zadanie 2. W magazynie znajdują się paczki. Jedna paczka waży nie więcej niż 1 t, zaś wszystkie razem ważą 10 t. Szef firmy chce przewieźć je ciężarówkami. Każda ciężarówka może przewieźć na raz do 3 t paczek, a ponadto może wykonać tylko jeden kurs. Ile ciężarówek musi zamówić szef by mieć pewność, że przetransportuje wszystkie paczki niezależnie od wagi poszczególnych egzemplarzy?

Autor zadania: Michał Fronczek

Rozwiązanie: Do tego celu potrzeba co najmniej 4 ciężarówki, gdyż w przeciwnym wypadku moglibyśmy przewieźć maksymalnie $3 \cdot 3 = 9$ t paczek. Rozważmy teraz sytuację, w której mamy 12 paczek po 0,76 t każda i jedną paczkę 0,88 t. Mamy zatem 13 paczek i 4 ciężarówki, czyli do którejś muszą trafić 4 paczki. Ale ich łączna masa jest nie mniejsza od $4 \cdot 0,76 = 3,04$ t, czyli jednak się tam nie zmieszczą. Sprzeczność.

Potrzebujemy zatem co najmniej 5 ciężarówek. Pokażemy, że tyle wystarczy. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Spakujmy wszystkie paczki, które jesteśmy w stanie. Został nam więc stos "niepakowalnych" paczek. Masa tych wrzuconych do ciężarówek jest zatem mniejsza od łącznej masy wszystkich paczek, tzn. 10 t. Na jedną ciężarówkę przypada więc średnio mniej niż 2 t ładunku ($\frac{10}{5} = 2$). Jest to wartość średnia, istnieje zatem ciężarówka, która ma niewiele więcej niż 2 t ładunku, czyli ma co najmniej 1 t pustego miejsca. Ale jak wiemy paczki ważą nie więcej niż 1 t, a więc na pewno do tej ciężarówki zmieści się jeszcze jedna paczka ze stosu niewłożonych. To jest jednak sprzeczne z założeniem o ich niewkładalności. Sprzeczność. A zatem 5 ciężarówek zawsze wystarczy. Taka też jest odpowiedź.