

-  **Zadanie 1.** Babcia piecze kuliste pączki o promieniu R . We wnętrzu pączka znajduje się pusta przestrzeń o promieniu r , również kulista. Zawartość pączka w pączku (stosunek objętości zajmowanej przez ciasto do objętości całego pączka) to $\frac{1}{2}$. Wyznacz r w zależności od R .

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Objętość pustej przestrzeni to $\frac{4}{3}\pi r^3$, a objętość całości to $\frac{4}{3}\pi R^3$. Objętość zewnętrznej części pączka to zatem $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Ponieważ z treści zadania

$$\frac{\cancel{\frac{4}{3}}\pi r^3}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi(R^3 - r^3)} = 1,$$

wiemy, że

$$r^3 = R^3 - r^3.$$

To równanie ma jedno rozwiązanie w $r \in \mathbb{R}$; wynosi ono $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}R$.

 **Zadanie 2.** Do pączków babcia zamierza podać kawę z mlekiem. W kredensie stoją filiżanki o kształcie stożków o wysokości H . Do jakiej wysokości h należy nalać kawy, aby zawartość kawy w kawie (zdefiniowana analogicznie do zawartości pączka w pączku) wynosiła $\frac{1}{2}$.

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Kawa musi zajmować połowę filiżanki. Niech S będzie skalą podobieństwa stożka zajętego przez kawę i całego stożka. Stosunek ich objętości to S^3 . Ponieważ objętość stożka jest wprost proporcjonalna do jego wysokości, $Sh = H$, czyli $h = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}H$.