

 **Zadanie 1.** Rozstrzygnij, czy skoczek szachowy może przejść po każdym polu szachownicy 5×5 dokładnie raz i wrócić na pole startowe? A co z szachownicą 4×4 ?

Źródło zadania: Wikipedia

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Zaczniemy od rozważenia szachownicy 5×5 , pokażemy, że konik nie może przejść na każde pole dokładnie raz i wrócić na pole startowe, czyli że nie istnieje cykl Hamiltona, w którym pola są traktowane jako wierzchołki grafu, zaś ruchy konika jako krawędzie.

Zauważmy, że konik w każdym swoim ruchu przechodzi z czarnego pola na białe lub z białego na czarne, nigdy dwa razy z rzędu nie stanie na polu tego samego koloru.

Szachownica 5×5 ma 25 pól, zatem aby skoczek odwiedził każde pole i wrócił na pole startowe, musi wykonać dokładnie 25 ruchów. Zawsze po nieparzystej liczbie ruchów jednak znajdzie się na polu o odmiennym kolorze od tego, z którego zaczął, czyli po 25 ruchach nie może znaleźć się na polu o tym samym kolorze, w szczególności na tym samym polu, zatem mamy wykazaną sprzeczność.

Warto zauważyć, że ta obserwacja mówi nam, że dla dowolnej szachownicy o wymiarach $n \times m$ dla m, n nieparzystych nie istnieje cykl Hamiltona dla konika.

Istotnie na planszy 5×5 nie istnieje cykl Hamiltona dla skoczka.

Teraz rozważymy problem szachownicy 4×4 . W tej części będziemy używać interpretacji szachownicy jako grafu opisanej powyżej. Będziemy chcieli znów pokazać, że cykl Hamiltona na takiej szachownicy nie istnieje.

Założmy, że istnieje cykl Hamiltona, zatem można przedstawić tę szachownicę w postaci grafu z takim cyklem. Wykorzystamy pewien lemat z teorii grafów, którego dowód znajduje się na końcu tego rozwiązania. Zatem z lematu 1. wiemy, że dla grafu będącego cyklem Hamiltona po usunięciu k wierzchołków (wraz z krawędziami z nich wychodzącymi) graf rozpada się na co najwyżej k spójnych składowych. Możemy więc usunąć 4 środkowe pola naszej szachownicy i policzyć pozostałą liczbę spójnych składowych. Jest ich 6 - łącząc wierzchołki ze wszystkimi polami, na które można się z nich przemieścić, otrzymamy cztery odseparowane wierzchołki i dwa cykle po cztery wierzchołki z pozostałych na krawędziach. $4 < 6$, co daje nam sprzeczność z lematem, jako że, gdyby był to od początku cykl Hamiltona, spójnych składowych powstałoby co najwyżej 4.

Otrzymaliśmy zatem sprzeczność również dla szachownicy 4×4 .

Lemat 1. Dla grafu posiadającego cykl Hamiltona po usunięciu k wierzchołków (wraz z krawędziami z nich wychodzącymi) może zostać podzielony na co najwyżej k spójnych składowych.

Założmy przeciwnie, że dla pewnego takiego grafu po usunięciu k wierzchołków powstało l spójnych składowych, przy czym $l > k$. Będziemy dodawać spowrotem usunięte wierzchołki i krawędzie wcześniej z nich wychodzące. Z definicji cyklu Hamiltona każdy wierzchołek odwiedzamy dokładnie raz, a więc możemy przejść z jednej składowej do drugiej, przechodząc przez wybrany dodany wierzchołek, ale nie możemy użyć go po raz drugi. Mamy do połączenia w zamknięty cykl l składowych, a więc do zapełnienia l "przerw" między nimi, przy dodaniu każdego nowego wierzchołka możemy zapełnić przerwę pomiędzy co najwyżej dwoma składowymi, zatem po dodaniu k wierzchołków przerw będzie $l - k$, czyli co najmniej 1, a więc nie jest to cykl. Pokazana sprzeczność pokazuje, że szacowanie $l \leq k$ jest prawdziwe.

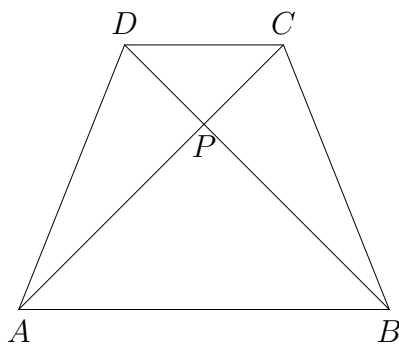
Zadanie 2. Niech w trapezie $ABCD$ o podstawach AB, CD przekątne przecinają się w punkcie P . Wiedząc, że $[CPD] = 8$, $[APD] = 16$, oblicz pole całego trapezu.

Uwaga: Zapis $[ABC]$, czyli nazwa wielokąta w kwadratowych nawiasach, zwyczajowo oznacza pole tego wielokąta.

Źródło zadania: Etap szkolny Wojewódzkiego Konkursu Przedmiotowego z Matematyki organizowanego przez Łódzkiego Kuratora Oświaty dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2025/26.

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie:



Rozwiązanie 1. Skoro podstawy AB, CD są równoległe, to możemy zapisać równość pól $[ADB] = [ACB]$. Po odjęciu obustronnie części wspólnej pól, czyli $[APB]$, możemy zapisać $[BPC] = [APD] = 16$.

Trójkąty CPD, CAD mają wspólną podstawę i równoległe wysokości. Znamy ich pola, możemy więc stwierdzić, że stosunek wysokości na bok CD to $1 : 3$, co z równoległości daje nam, że wysokość trójkąta APB z wierzchołka P to różnica wysokości CAD na bok CD i wysokości CPD z wierzchołka P . Zatem stosunek rozważanych wysokości CPD do APB to $1 : 2$.

Trójkąty APB i CPD są podobne, jako że kąty $\sphericalangle ABP$ i $\sphericalangle CDP$ są naprzemianległe, analogicznie $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle DCP$. Możemy więc zapisać, że stosunek ich pól jest równy stosunkowi kwadratów ich wysokości opuszczonych z odpowiadających wierzchołków. Zatem skoro wynosi on $2 : 1$, to stosunek pól to $4 : 1$, przy czym znamy $[CPD] = 8$, więc $[APB] = 32$.

Zatem pole całego trapezu wyraża się sumą $[ABCD] = [APB] + [APD] + [CPD] + [BPC] = 8 + 16 + 32 + 16 = 72$.

Rozwiązanie 2. Analogicznie jak w poprzednim rozwiązaniu pokazujemy, że $[BPC] = 16$.

Możemy zaobserwować, że trójkąty APD, CPD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka D , znamy pola obu tych trójkątów, możemy więc stwierdzić, że stosunek podstaw, na które opuszczona jest wspólna wysokość to $AP : PC = 2 : 1$.

Podobnie trójkąty APB, CPB mają wspólną wysokość z wierzchołka B , znamy już stosunek ich podstaw i pole jednego z nich równe 16. Stosunek tych pól jest oczywiście równy stosunkowi podstaw, na które opuszczona jest wspólna wysokość, czyli $[APB] : [CPB] = AP : CP = 2 : 1$. Stąd $[APB] = 32$.

Po zsumowaniu czterech pól dochodzimy do takiego samego rezultatu, $[ABCD] = 72$.