

 **Zadanie 1.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$2f(x) + f(1 - x) = 3x$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Autor zadania: Henryk Pawłowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie: Najpierw podstawmy $x := 1 - x$.

$$2f(1 - x) + f(x) = 3 - 3x$$

Teraz dodajmy stronami dwa powyższe równania.

$$3f(x) + 3f(1 - x) = 3$$

$$f(x) + f(1 - x) = 1$$

Odejmując stronami to równanie od podstawowej wersji warunku, otrzymujemy więc:

$$f(x) = 3x - 1$$

jako jedyne rozwiązanie zadanej funkcji. Sprawdźmy, czy znaleziony wzór funkcji spełnia wyjściowe równanie.

$$2f(x) + f(1 - x) = 3x$$

$$6x - 2 + 3 - 3x - 1 = 3x$$

$$3x = 3x$$

Skoro równanie jest spełnione, to jedynym rozwiązaniem jest właśnie funkcja $f(x) = 3x - 1$.

Zadanie 2. Niech a, b, c to długości boków trójkąta, p to połowa jego obwodu, zaś r to długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Udowodnij, że zachodzi

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

Autor zadania: Henryk Pawłowski

Wybór zadania i redakcja rozwiązania: Maria Janyska

Rozwiązanie:

Sposób 1: W rozwiązaniu wykorzystamy dwa niestandardowe wzory na pole trójkąta (oznaczymy je jako S).

$$S = p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Z tego przyrównania możemy wyznaczyć

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Używając otrzymanej równości, przekształcamy równoważnie tezę zadania

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ta nierówność jednak wynika z nierówności w ciągach jednonotonicznych: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Podstawmy bowiem $x = \frac{1}{p-a}$, $y = \frac{1}{p-b}$, $z = \frac{1}{p-c}$. Otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-c}\right)^2 \geq \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)}$$

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-c}\right)^2 \geq \frac{(p-c) + (p-b) + (p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ale skoro p jest połową obwodu, to $p-c+p-b+p-a = 3p-(a+b+c) = 3p-2p = p$, więc

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{p-c}\right)^2 \geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

faktycznie zachodzi.

Sposób 2: Możemy także zinterpretować otrzymaną nierówność

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

geometrycznie. Niech $x, y, z > 0$ oznaczają odpowiednio odcinki styczne do okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c wychodzące z wierzchołków między bokami b i c , c i a , b i a . Z twierdzenia o równości odcinków stycznych wiemy, że $p = x + y + z$ oraz $p - a = x, p - b = y, p - c = z$. Możemy więc zapisać przekształconą tezę jako

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{x + y + z}{xyz}$$

$$xyz \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq x + y + z$$

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z$$

$$2 \left(\frac{yz}{2x} \right) + 2 \left(\frac{zx}{2y} \right) + 2 \left(\frac{xy}{2z} \right) \geq x + y + z$$

Oszacujmy pary wyrazów przez AM-GM (jako że wszystkie wartości są dodatnie).

$$\frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{xyz^2}{4xy}} = 2 \cdot \frac{z}{2} = z$$

$$\frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} \geq 2\sqrt{\frac{x^2yz}{4yz}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

$$\frac{xy}{2z} + \frac{yz}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{xy^2z}{2zx}} = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$$

Dodając parami te nierówności, otrzymujemy właśnie naszą przekształconą tezę, więc nierówność zachodzi.