

 **Zadanie 1.** Na prostokątnej blasze do pieczenia zmieściło się $n \in \mathbb{N}$ pierników. Wykaż, że na tej samej blasze zmieści się $4n$ pierników o 2 razy mniejszej średnicy.

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Zauważmy, że dowolny prostokąt możemy podzielić na 4 prostokąty podobne do niego w skali $\frac{1}{2}$. Możemy więc podzielić blachę do pieczenia na 4 mniejsze blachy. Rozważmy jednokładność w wierzchołku blachy o skali $\frac{1}{2}$. Pierniki leżące na blasze przechodzą na 2 razy mniejsze pierniki, ułożone na jednej z mniejszych kopii blachy. To samo możemy zrobić dla pozostałych wierzchołków. Skoro na każdej z mniejszych blach mieści się n mniejszych pierników, na całej blasze mieści się ich $4n$.

■

Zadanie 2. Święty Mikołaj ma kulisty worek o promieniu R . Ponieważ Mikołaja niepokoi niechęć polskich uczniów do nauki matematyki, wszystkie dzieci dostaną w tym roku podręczniki do tej wspaniałej nauki. Książki mają bardzo praktyczny kształt kwadratu. Jaki może być maksymalny rozmiar (pole powierzchni okładki) podręcznika, aby zmieścił się w worku? Przyjmij, że książka jest nieskończenie cienka.

Autor zadania: Grzegorz Rudnicki

Rozwiązanie: Rozważmy przekrój przez worek płaszczyzną zawierającą książkę. Jest to okrąg o promieniu R . Oznaczmy wymiary książki przez $2a \times 2b$. Pole książki to $4ab$. Jeżeli prostokąt jest wpisany w okrąg, jego przekątna jest średnicą okręgu. Zatem musi być spełniony warunek $4a^2 + 4b^2 = 4R^2$, czyli $a^2 + b^2 = R^2$. Z nierówności AM-GM mamy

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Zatem maksymalne możliwe pole to $\frac{R^2}{2}$. Wartość tę otrzymujemy dla kwadratu o boku $R\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■